Symmetrische Differenz Metrik

- Kernprobleme der Dominanzrelation
  - Es gibt möglicherweise keinen Condorcet-Gewinner.
  - Die Dominanzrelation enthält möglicherweise Kreise.
- Def.: Die symmetrische Differenz zweier Dominanzrelationen R und S ist $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$.
- Def.: Der (Kendall-)Abstand zweier Dominanzrelationen R uns S ist $\delta(R,S) = |R \Delta S|$
  - Man kann R durch das Löschen/Hinzufügen von $\delta(R,S)$ Kanten in S überführen.

Lösungskonzepte

- Condorcet-Gewinner der “nahegelegensten” (bezüglich δ) Dominanzrelationen, die einen Condorcet-Gewinner haben.
  - Modifiziere so wenig Kanten wie möglich bis es einen Condorcet-Gewinner gibt.
  - Das ist das Copeland-Verfahren!
- Maximale Elemente der “nahegelegensten” (bezüglich δ) Dominanzrelationen, die kreisfrei sind.
  - Modifiziere (entferne) so wenig Kanten wie möglich bis die Dominanzrelation kreisfrei ist.
  - Dieses Verfahren wurde von Slater (1961) eingeführt: $SL(>)$
  - Transitivität und Kreisfreiheit sind in Turniergraphen identisch.

Eigenschaften der Slater Menge

- Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, enthält ihn die Slater Menge als einziges Element.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $SL(>) \subseteq GO(>)$.
  - Beweis: Tafel
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $SL(>) \cap SC(>) \neq \emptyset$.
  - Beweis: Durch das Zerstören der Kreise innerhalb der Schwartz Menge erhält man mindestens ein undominiertes Element innerhalb der Schwartz Menge.
- Die Slater Menge kann einen leeren Schnitt mit der Copeland Menge und jeder stabilen Menge haben.

Berechnung der Slater Menge

- Satz: Festzustellen, ob ein Dominanzgraph durch das Entfernen von k Kanten kreisfrei gemacht werden kann ist NP-vollständig (*feedback arc set*).
- Beweis:
  - In NP: Eine Lösung zu Überprüfen ist einfach.
  - NP-schwer: Reduktion von 3SAT. Tafel.
    - Behauptung:
      φ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ Durch das Entfernen von k Kanten wird der Graph kreisfrei.

      (k: Anzahl der Variablen)
    - Um einen kreisfreien Graph zu erhalten muss aus jedem Variablen-3er-Kreis mindestens eine Kante entfernt werden.

Berechnung der Slater Menge (2)

- Satz: Eine Alternative aus der Slater Menge zu finden ist NP-schwer.
  - Beweis: Turing-Reduktion von feedback arc set.
  - Nehmen wir an, es wäre möglich einen Slater Gewinner eines Dominanzgraphen effizient zu finden.
  - Dann würde folgender polynomieller Algorithmus einen minimalen feedback arc set finden:
    - Wiederhole die folgenden Schritte bis der Graph kreisfrei ist:
      - Finde einen Slater Gewinner und speicher alle eingehenden Kanten dieses Knotens.
      - Entferne den Slater Gewinner aus dem Graphen.
    - Die gespeicherten Kanten bilden einen minimum feedback arc set.
  - Widerspruch, denn es ist bereits NP-schwer zu entscheiden, ob es einen minimum feedback arc set bestimmer Größe gibt.

Die Banks Menge

(Jeffrey Scot Banks, 1985)

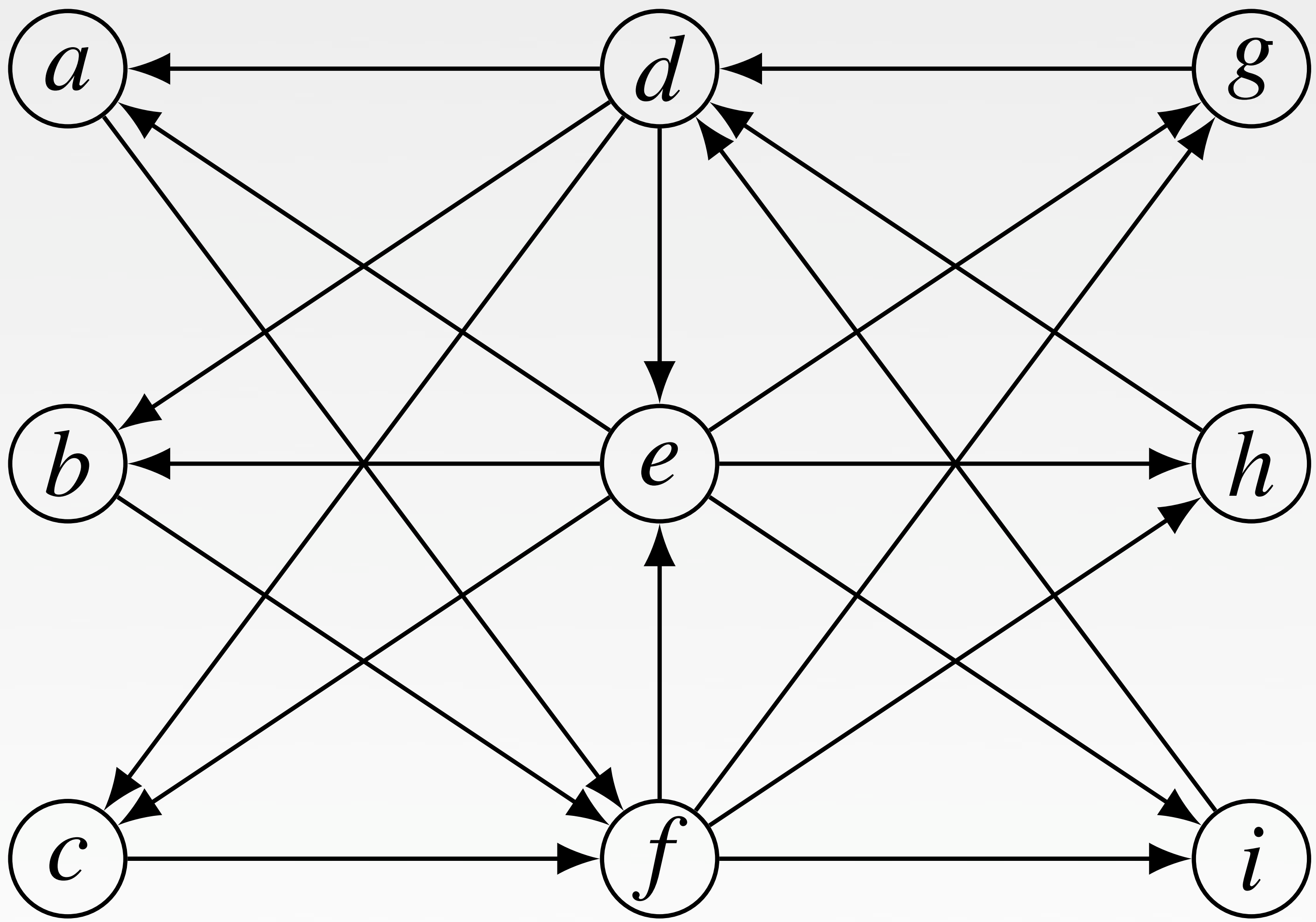
- Kernprobleme der Dominanzrelation
  - Es gibt möglicherweise keinen Condorcet-Gewinner.
  - Die Dominanzrelation enthält möglicherweise Kreise.
- Idee 1: Condort-Gewinner der größten Teilgraphen (bezüglich Mengeninklusion)
  - Uncovered set UC(>): übernächste Vorlesung
- Idee 2: Maximale (=undominierte) Elemente der größten kreisfreien Teilgraphen (bezüglich Mengeninklusion)
  - Banks Menge BA(>)

	Condorcet	kreisfrei
Minimale Modifikation der Kantenmenge	Copeland	Slater
Maximale Teilmengen der Knotenmenge	Uncovered	Banks

Eigenschaften der Banks Menge

- Wenn ein Condorcet-Gewinner existiert, enthält ihn die Banks Menge als einziges Element.
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $BA(>) \subseteq GO(>)$.
  - Beweis: Tafel
- Satz: In allen Dominanzgraphen gilt $BA(>) \cap SC(>) \neq \emptyset$.
  - Beweis: Tafel.
- Die Banks Menge kann einen leeren Schnitt mit der Copeland Menge, der Slater Menge und jeder stabilen Menge haben.

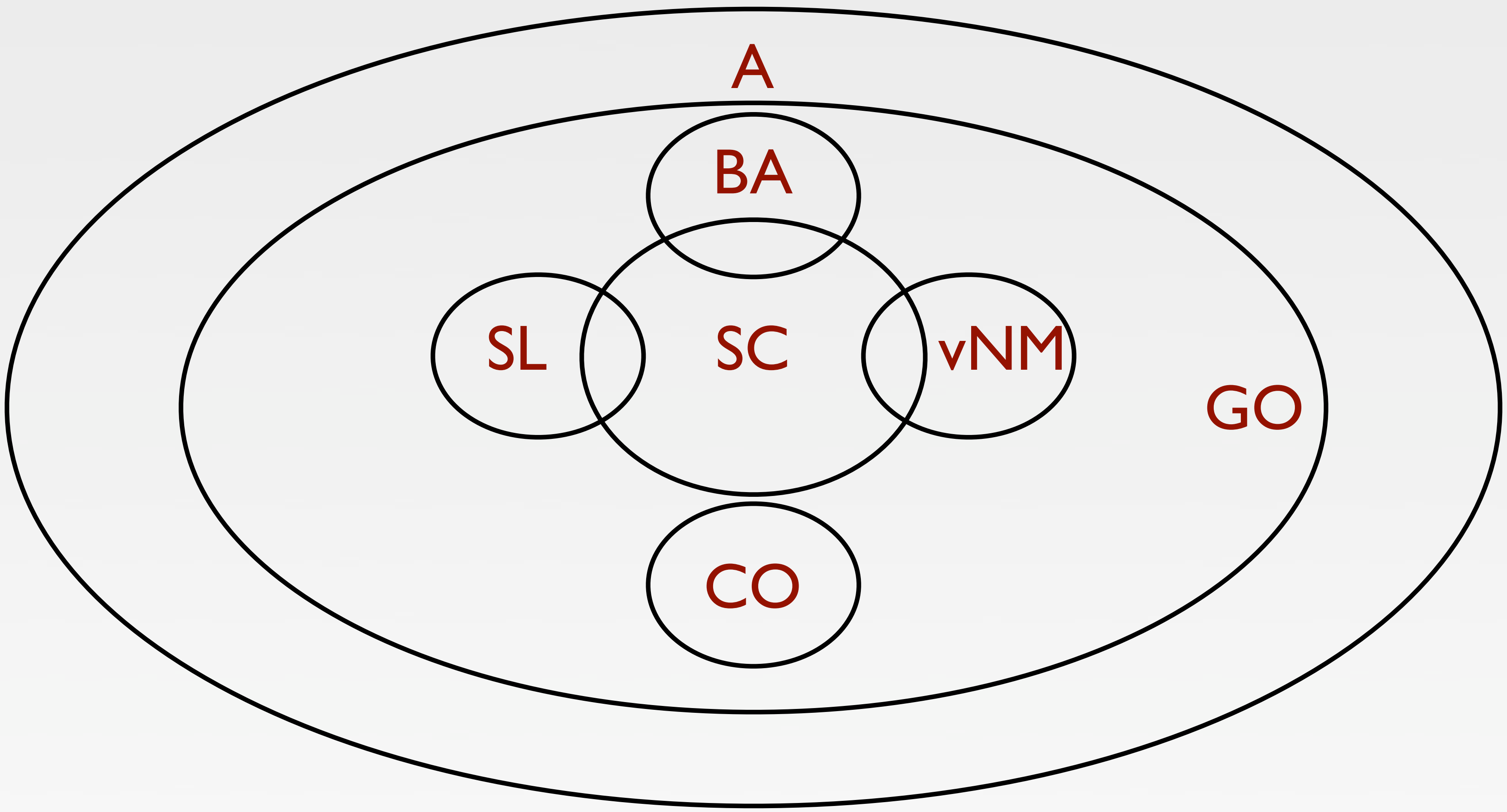
$BA(>) \cap CO(>) = \emptyset$



Berechnung der Banks Menge

- Satz: Eine Alternative aus der Banks Menge zu finden ist einfach (in $O(m^2)$).
  - Starte mit einem beliebigen Knoten und erschliesse einen Rückwärtspfad solange bis kein Knoten mehr hinzugefügt werden kann, ohne dass ein Kreis entsteht.
- Satz: Festzustellen, ob eine Alternative in der Banks Menge liegt ist NP-vollständig.
  - Beweis:
    - In NP: Eine Lösung zu Überprüfen ist einfach.
    - NP-schwer: Reduktion von 3SAT. Tafel.
      - Eine maximale kreisfreie Menge mit maximalem Element d muss einen Knoten aus jeder Ebene unter d beinhalten.
      - Eine maximale kreisfreie Menge mit maximalem Element d darf keine Pfeile nach oben beinhalten.
      - d liegt in der Banks Menge genau dann wenn die Klauselmenge erfüllbar ist.

(Vorläufige) Ergebnisse



Stabile Mengen (1944)	vNM	$O(2^m)$
Copeland (1951)	CO	$O(m^2)$
Slater (1961)	SL	$O(2^m)$
Good (1971)	GO	$O(m^2)$
Schwartz (1972)	SC	$O(m^2)$
Banks (1985)	BA	$O(2^m)$